



TITLE:

# Online, Submodular, and Polynomial Optimization with Discrete Structures( Abstract\_要旨 )

AUTHOR(S):

Sakaue, Shinsaku

---

CITATION:

Sakaue, Shinsaku. Online, Submodular, and Polynomial Optimization with Discrete Structures. 京都大学, 2020, 博士(情報学)

ISSUE DATE:

2020-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k22588>

RIGHT:

## 博士學位論文調查報告書

論 文 題 目      Online, Submodular, and Polynomial Optimization with Discrete Structures

(オンライン最適化, 劣モジユラ関数最大化, および多項式関数最適化に対する離散構造に基づいたアルゴリズムの研究)

申請者氏名 坂上 晋作

最 終 学 歴      平成28年    3 月

東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻修士課程 修了  
令和2年 3月

京都大学大学院情報学研究科通信情報システム専攻博士後期課程

## 研究指導認定見込

学 識 確 認      令和      年      月      日（論文博士のみ）

論文調査委員 京都大学大学院情報学研究科  
(調査委員長) 教 授 湊 真一

論文調査委員 京都大学大学院情報学研究科  
教授 五十嵐 淳

論文調査委員 京都大学大学院情報学研究科  
教授 山本 章博

( 続紙 1 )

京都大学	博士（情報学）	氏名	坂上 晋作
論文題目	Online, Submodular, and Polynomial Optimization with Discrete Structures （オンライン最適化, 劣モジュラ関数最大化, および多項式関数最適化に 対する離散構造に基づいたアルゴリズムの研究）		
（論文内容の要旨）			
<p>本論文は、困難な最適化問題である「組合せ的オンライン最適化問題」、「制約付き劣モジュラ関数最大化問題」、「二値変数多項式関数最適化問題」の3種の問題に対し、それらの持つ離散的な構造に着目した最適化アルゴリズムを提案し、得られたアルゴリズムの現実的有用性や理論的な性能の保証についての研究成果をまとめたものであり、全9章から構成されている。</p> <p>第1章は序論であり、本論文で取り扱う3種の問題を概観し、表記法と基本的用語を整理している。</p> <p>第2章では、本論文の背景となる知識として、二分決定グラフ（BDD）およびゼロサプレス型二分決定グラフ（ZDD）を用いた離散構造の効率的な処理技法について基本事項をまとめている。</p> <p>第3章では、本論文の最初の課題である「組合せ的オンライン最適化問題」について論じている。最適化問題において評価値が時々刻々と変化する場合、最適化を行う側は、過去の情報に基づいて各時刻で新たな選択肢を選ぶことになる。このような逐次的な最適化の枠組みはオンライン最適化問題と呼ばれているが、各時刻における選択肢が組合せ的な構造に由来する場合、選択肢の数が膨大になり、従来法では現実的な計算時間での逐次的最適化が困難な場合があった。本論文では、組合せ的な構造を索引化するZDDを活用した効率的なオンラインアルゴリズムを提案している。特に、各時刻において選んだ選択肢の評価値だけしか観測できないバンディット設定と呼ばれる困難な設定に対しても計算を効率的に行う手法を与え、その有効性を実験的に確認している。</p> <p>第4章では、以降で必要となる背景知識として、劣モジュラ関数最大化と呼ばれる離散最適化の問題についての既存技法をまとめている。この章に続く3つの章で、本論文の2番目の課題である「制約付き劣モジュラ関数最大化問題」を、それぞれ異なる3種類の制約について論じている。</p> <p>第5章では、グラフ上の制約を持つ劣モジュラ最大化問題について論じている。劣モジュラ関数最大化問題は制約がある種の望ましい性質（例えばマトロイド性など）を持つ場合は従来法によって効率的に近似解が得られるが、グラフ上で記述される制約の中にはこうした性質を持たないものも多い。本論文ではこうした問題に対し、まずZDDを用いて制約を満たす集合を表現し、その上で劣モジュラ関数を最大化する手法を提案し、その理論的な近似保証を示している。また現実的な問題に対して実験を行い、提案法の実用性を確認している。</p> <p>第6章では、予算制約を持つ単調劣モジュラ関数最大化問題を論じている。この問題では、多項式時間で最適値の約63%の近似保証を達成する解が得られ、それ以上の近似保証は多項式時間では不可能なことが知られている。しかし現実の問題では、計算に最悪指数時間かかるとしても、経験的に効率よく63%以上の近似保証を達成したい場面も存在する。本論文では、最良優先探索に基づく効率的なアルゴリズムを考案</p>			

し、任意の近似保証を達成する解を経験的に効率よく計算できることを実験的に確認している。

第7章では、マトロイド制約付き単調 $k$ -劣モジュラ関数最大化問題を論じている。 $k$ -劣モジュラ関数は、集合関数における「使用する/しない」のような2値の選択を、 $k$ 値 ( $k$ は正整数) の選択に拡張した関数であり、 $k$ 種類のセンサ配置などを考える際に現れる。この問題については、一般的な制約であるマトロイド制約の場合の近似保証はこれまで示されていなかった。本論文では、マトロイドの持つ構造に着目することで、貪欲法によって $1/2$ 近似保証が達成されることを証明している。

第8章では、本論文の3番目の課題である「二値変数多項式関数最適化問題」を論じている。多項式関数は様々な関数クラスを含むため様々な問題を定式化可能であるが、目的関数の非凸性と非連続性のため最適化が計算困難である。これを半正定値計画問題に帰着する解法が広く研究されているが、帰着により問題のサイズが指数的に増大するおそれがあった。本論文では、目的関数である多項式関数の構造に着目し、既存の結果よりも指数的に小さなサイズの半正定値計画問題に帰着可能であることを証明している。さらに、数値実験によって、本結果で得られたサイズがタイトな上界であることも確認している。

第9章は結論であり、本論文を総括した上で、今後の課題について述べている。

(論文審査の結果の要旨)

本論文は、計算が困難な3種類の離散最適化問題に対し、それぞれの問題に特有の数学的構造に着目した最適化アルゴリズムを提案し、現実的な有用性や理論的な性能保証についての研究をまとめたものである。主要な成果は以下の通りである。

(1) 組合せ的オンライン最適化アルゴリズムの提案とその評価

時々刻々と評価値が変化するオンライン最適化問題において、組合せ的な選択肢が与えられる場合、可能な選択肢が指数的に増大するため計算が難しいという課題があった。本論文では、組合せ構造を圧縮して索引化するゼロサプレス型二分決定グラフ(ZDD)を活用したアルゴリズムを提案している。特に、各時刻において選択した要素の評価値以外は観測できないという困難な問題設定に対し、ZDDが表現する各要素の組合せ的な共起確率を動的計画法によって効率的に計算する方法を与えることで、既存手法と同等の理論保証を達成しつつ各時刻での計算を効率的に行う手法を示し、その有効性を実験的に確認している。

(2) 制約付き劣モジュラ関数最大化アルゴリズムの提案とその評価

劣モジュラ関数最大化問題は、センサ配置や広告予算配分などの様々な場面で現れるが、現実の場面では様々な制約条件を伴うことが多い。本論文では、「グラフ上の制約付き劣モジュラ関数」、「予算制約付き単調劣モジュラ関数」、「マトロイド制約付き単調 $k$ -劣モジュラ関数」の3つの制約付き関数について、それぞれの制約の数学的な構造に着目し、最適に近い評価値を持つ近似解を高速に求めるアルゴリズムを提案している。それらの近似率を理論的に保証するとともに、実験的に有効性を確認している。

(3) 二値変数多項式関数最適化アルゴリズムの提案とその評価

多項式関数は様々な離散最適化問題(最大カット問題や最大独立集合問題など)への応用を持つが、非凸性や非連続性を伴うため計算が困難であった。本論文では、元の問題よりも多い変数を持つ凸最適化問題(半正定値計画問題)に帰着する既存技法の改良に取り組み、多項式関数に由来するケイリーグラフと呼ばれるグラフ構造に着目することで、既存の結果よりも指数的に小さなサイズの半正定値計画問題に帰着可能であることを証明している。さらに数値実験によって、本結果で得られたサイズがタイトな上界であること、すなわち、本結果で得られたサイズよりも小さなサイズの半正定値計画問題としては定式化できない問題例が存在することも確認している。

以上、本論文は、離散最適化の分野においてこれまで計算困難と考えられていた3種類の最適化問題に対して、新規のアルゴリズムを提案し、その有効性を理論的および実験的に示したもので、学術上寄与するところが少なくない。よって、本論文は博士(情報学)の学位論文として価値あるものと認める。

また、令和2年1月31日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。本論文のインターネットでの全文公表についても支障がないことを確認した。